★ المراجعة النهائية في ★
★ الجبر والهندسة الفراغية ★

مبدأ العد: إذا كان عدد طرق إجراء تجربة ما هو م
وعدد طرق إجراء تجربة أخرى هو ن فإن
عدد طرق إجراء التجربة الأولى أو الثانية = م + ن
عدد طرق إجراء التجربة الأولى و الثانية = م × ن

مثلا:

① كم عدد يتكون من ثلاثة أرقام مختلفة من مجموعة الأرقام {٠، ١، ٢، ٣، ٤}

الحل: عدد طرق اختيار خانة المئات = ٤
عدد طرق اختيار خانة العشرات = ٤
عدد طرق اختيار خانة الآحاد = ٣
∴ عدد الطرق الكلية = ٤ × ٤ × ٣ = ٤٨

② عدد طرق وقوف ٤ سيارات في ساحة انتظار بها ٨ أماكن للانتظار

الحل: عدد الطرق = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ = $^{8}ل_{4}$ = ١٦٨٠

③ مكتب به ٩ رجال، ٦ سيدات، يراد تكوين لجنة من ٥ أشخاص أغلب أعضائها من السيدات ولا تخلو من الجنسين فإن عدد اللجان = ...
(١١٨٨٠ ، ٢٨٧١ ، ٣٠٠٣ ، ٨٥٥)

الحل:
عدد الطرق = $^{6}ق_{4} \times {}^{9}ق_{1} + {}^{6}ق_{3} \times {}^{9}ق_{2}$
= ١٣٥ + ٧٢٠ = **٨٥٥**

★ التباديل والتوافيق:

أولاً: التباديل: تذكر أن: ① $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)\ldots\ldots(\text{ن}-\text{ر}+١)$

لكل ن ∈ ص+ ، ر ∈ ط ، ن ≥ ر

② $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}} = \lfloor\text{ن}$ ③ $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \dfrac{\lfloor\text{ن}}{\lfloor\text{ن}-\text{ر}}$

مثلاً:

① إذا كان $^{٣\text{ن}-٥}\text{ل}_{٥} = ٢٥٢٠$ فإن ن = ...

الحل: $^{٣\text{ن}-٥}\text{ل}_{٥} = {}^{٧}\text{ل}_{٥}$ ∴ ٣ن − ٥ = ٧ $\boxed{\text{ن} = ٤}$

② إذا كان $^{\text{ن}-٤}\text{ل}_{٩} = {}^{\text{ن}-٤}\text{ل}_{٩}$ أوجد قيم ن

الحل: ∵ ن − ٤ ≥ ٩ ∴ ن ≥ ١٣ ن = {١٣، ١٤، ١٥، ....}

ثانياً: التوافيق: ① $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \dfrac{^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\lfloor\text{ر}}$: ن ≥ ر ، ن ∈ ص+ ، ر ∈ ط

② $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \dfrac{\lfloor\text{ن}}{\lfloor\text{ن}-\text{ر}\ \lfloor\text{ر}}$

③ $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$

④ إذا كان $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{س}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ص}}$ فإن

إما س = ص أو س + ص = ن

مثال ①: إذا كان $^{٣٠}\text{ق}_{٣\text{ن}-١} = {}^{٣٠}\text{ق}_{٢\text{ن}+١}$ أوجد قيمة ن؟

الحل:

إما ٣ن − ١ = ٢ن + ١ أو ٣ن − ١ + ٢ن + ١ = ٣٠

$\boxed{\text{ن} = ٢}$ أو ٥ن = ٣٠ ∴ $\boxed{\text{ن} = ٦}$

② إذا كان $^{ن+1}ق_{ن-1} = 66$ فإن $ن = ----$

الحل: $^{ن+1}ق_{ن-1} = ^{ن+1}ق_{(ن+1)-(ن-1)} = ^{ن+1}ق_{2}$

$\therefore\ ^{ن+1}ق_{2} = 66 = ^{12}ق_{2}$ $\qquad \therefore ن+1 = 12$ $\qquad \boxed{ن = 11}$

=

★ **قانون النسبة:** $\boxed{\dfrac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-1}} = \dfrac{ن-ر+1}{ر}}$

قانون الجمع: $\boxed{^{ن}ق_{ر} + ^{ن}ق_{ر-1} = ^{ن+1}ق_{ر}}$

مثال: إذا كان $^{ن}ق_{9} > ^{ن}ق_{8}$ فإن $ن > ----$ $\quad$ (١٤، ١٥، ١٦، ١٧)

الحل: $\dfrac{^{ن}ق_{9}}{^{ن}ق_{8}} > 1$ $\qquad \therefore \dfrac{ن-9+1}{9} > 1$

$\therefore ن-8 > 9$ $\qquad \boxed{ن > 17}$

=

★ إذا كان $\underline{|2}\ \underline{|2ن-4} = \underline{|ن-4}\ \underline{|ن+2}$ أوجد قيمة $ن$

الحل: $\underline{|2}\ \underline{|2ن-4} = \underline{|ن-4}\ \underline{|ن+2}$

$\therefore \dfrac{\underline{|2ن-4}}{\underline{|ن-4}} = \dfrac{\underline{|ن+2}}{\underline{|2}}$ $\qquad \therefore\ ^{2ن-4}ل_{ن} = ^{ن+2}ل_{ن}$

$\therefore$ الدليل متساوي $\qquad \therefore 2ن-4 = ن+2$

ومنه $\boxed{ن = 6}$

=

★ نظرية ذات الحدين ★

في مفكوك $(٣س^{٤} - \frac{١}{س})^{١٣}$ اوجد $ح_{١٠}$ من النهاية

الحل: $ح_{١٠}$ من النهاية = $ح_{٤}$ من البداية في مفكوك $(\frac{-١}{س} + ٣س^{٤})^{١٣}$

$∴ ح_{١٠} = {}^{١٣}ق_{٩} (٣س^{٤})^{٩} (\frac{-١}{س})^{٤} = {}^{١٣}ق_{٩} (٣)^{٩} (-١)^{٤} س^{١٨} \times س^{-٤}$

$= {}^{١٣}ق_{٩} (٣)^{٩} س^{١٤}$

في مفكوك $(س + ص)^{ن}$:

★ النسبة بين حدين متتاليين: $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} (\frac{ص}{س})$

★ الحد الأوسط والحدين الأوسطين

١) اذا كانت ن عدد زوجي يوجد حد أوسط وحيد رتبته $(\frac{ن}{٢} + ١)$

٢) اذا كانت ن عدد فردي يوجد حدين أوسطين رتبتاهما $\frac{ن+١}{٢}$ ، التالي له

مثال: اوجد قيمة س التي تجعل الحدين الأوسطين في مفكوك $(\frac{٤}{س} + \frac{س^{٤}}{٨})^{٩}$ متساويين

الحل:

رتبة الحدين الأوسطين هما $\frac{٩+١}{٢}$ ، التالي = ٥ ، ٦

$∴ ح_{٦} = ح_{٥}$ ومنها

$\frac{ح_{٦}}{ح_{٥}} = ١$

$∴ \frac{٩ - ٥ + ١}{٥} (\frac{س^{٤}}{٨} \div \frac{٤}{س}) = ١$ $∴ (\frac{س^{٤}}{٨} \times \frac{س}{٢}) = ١$

$∴ س^{٤} = ١٦$ ومنها $\boxed{س = \pm ٢}$

مثال: في مفكوك $(1+\text{هـ}\,\text{س})^{10}$ اذا كان معامل $\text{ح}_3 = 180$ ، $\text{ح}_5 = 210$
اوجد قيمة هـ ، س

الحل: معامل $\text{ح}_3 = {}^{10}\text{ق}_2\,\text{هـ}^2$ $\therefore 45\,\text{هـ}^2 = 180$

$\text{هـ}^2 = 4$ $\boxed{\text{هـ} = \pm 2}$

$\text{ح}_5 = {}^{10}\text{ق}_4 (\text{هـ}\,\text{س})^4$

$\therefore \cancel{210}\,\text{هـ}^4\text{س}^4 = \cancel{210}$ $\therefore 16\,\text{س}^4 = 1$ $\boxed{\text{س} = \pm\frac{1}{2}}$

مثال: اوجد الحد المشتمل على س^8 في مفكوك $(2\text{س}^2 + \frac{1}{\text{س}})^{10}$

الحل: $\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{10}\text{ق}_{\text{ر}} (\frac{1}{\text{س}})^{\text{ر}} (2\text{س}^2)^{10-\text{ر}}$

$= {}^{10}\text{ق}_{\text{ر}} (2)^{10-\text{ر}} \times \text{س}^{-\text{ر}} \times \text{س}^{20-2\text{ر}}$

$= {}^{10}\text{ق}_{\text{ر}} (2)^{10-\text{ر}} \times \text{س}^{20-3\text{ر}}$

$20 - 3\text{ر} = 8$ $\therefore 3\text{ر} = 12$ $\boxed{\text{ر} = 4}$ الحد ح_5

مثال: اوجد الحد الخالي من س في مفكوك $(\text{س} + \frac{1}{4\text{س}^3})^{16}$ حسب قوى س التنازلية

الحل: $\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{16}\text{ق}_{\text{ر}} (\frac{1}{4\text{س}^3})^{\text{ر}} (\text{س})^{16-\text{ر}}$

$= {}^{16}\text{ق}_{\text{ر}} (\frac{1}{4})^{\text{ر}} \times \text{س}^{-3\text{ر}} \times \text{س}^{16-\text{ر}}$

$= {}^{16}\text{ق}_{\text{ر}} (\frac{1}{4})^{\text{ر}} \times \text{س}^{16-4\text{ر}}$

$16 - 4\text{ر} = 0$ $\therefore \boxed{\text{ر} = 4}$

$\therefore \text{ح}_5$ هو الخالي من س

$\text{ح}_5 = {}^{16}\text{ق}_4 (\frac{1}{4})^4$

مثال: في مفكوك $(\frac{1}{س} + ل س^2)^8$ حسب قوى س التصاعدية. اذا كان معامل $س^7 = 56$ فان قيمة ل = ... $(\frac{1}{5} ، 5 ، -1 ، 1)$

الحل:

$$ح_{ر+1} = {}^8ق_ر (ل س^2)^ر (\frac{1}{س})^{8-ر} = {}^8ق_ر ل^ر س^{2ر} \times س^{ر-8}$$

$$= {}^8ق_ر ل^ر س^{3ر-8}$$

عندما $3ر - 8 = 7$ $\boxed{ر = 5}$

$\therefore {}^8ق_5 ل^5 = 56$ $\therefore ل^5 = 1$ $\boxed{ل = 1}$

=

☆ الأعداد المركبة ☆

الصورة الجبرية $ع = س + ت ص$

الصورة المثلثية $ع = ل (جتا هـ + ت جا هـ)$

الصورة الأسية $ع = ل هـ^{ت هـ}$

=

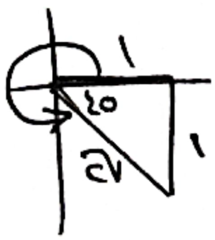
اذا كانت $ع = س + ت ص$ فان $|ع| = \sqrt{س^2 + ص^2}$ مقياس العدد

السعة الأساسية هـ : $ظا هـ = \frac{ص}{س}$

=

مثال: السعة الأساسية للعدد المركب $ع = 1 - ت$ هي ....

الحل:



$س = 1$ ، $ص = -1$ $ظا هـ = \frac{ص}{س}$

$ظا هـ = \frac{-1}{1}$ هـ في الربع الرابع

$$هـ = 360 - 45 = 315^\circ$$

$$هـ = \frac{7\pi}{4}$$

=

مثال: ضع العدد ع = ١ − √٣ ت في الصورة المثلثية ثم اوجد جذريه التربيعيين في الصورة الأسية

الحل: س = ١ ، ص = −√٣   ل = √(١ + ٣) = ٢

ظا هـ = ص/س = −√٣/١ = −√٣   في الربع الرابع

هـ = ٣٦٠ − ٦٠ = ٣٠٠

∴ ع = ٢ [جتا ٣٠٠ + ت جا ٣٠٠] = ٢ [جتا ٥π/٣ + ت جا ٥π/٣]

في الصورة العامة

ع = ٢ [جتا (٣٠٠ + ٢ر π) + ت جا (٣٠٠ + ٢ر π)]

ع^(١/٢) = √٢ [جتا (٣٠٠ + ٢ر π)/٢ + ت جا (٣٠٠ + ٢ر π)/٢] : ر = ٠ ، ١

عند ر = ٠ : الجذر الأول = √٢ [جتا ١٥٠ + ت جا ١٥٠]
= √٢ هـ^(٥/٦ π ت)

عند ر = ١ : الجذر الثاني = √٢ [جتا ٣٣٠ + ت جا ٣٣٠]
= √٢ هـ^(١١/٦ π ت)

مثال: اذا كان ع = ل (جا ٤/٣ π − ت جتا ٤/٣ π) : ل > ٠
فإن ع^٦ = ...   (−ل ، ٦ل ، −٦ل ، −ل^٦)

الحل:

ع = ل [جا ٢٤٠ − ت جتا ٢٤٠]

جا ٢٤٠ = جا (٩٠ + ١٥٠)
= جا ٩٠ جتا ١٥٠ + جتا ٩٠ جا ١٥٠
= جتا ١٥٠

∴ ع = ل [جتا ١٥٠ + ت جا ١٥٠]

ع^٦ = ل^٦ [جتا ٦×١٥٠ + ت جا ٩٠٠]

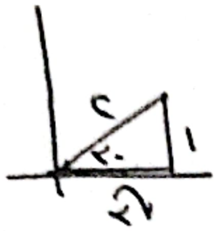
= ل^٦ [جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠] = ل^٦ (−١ + ٠)

∴ ع^٦ = −ل^٦

مثال: اذا كان $ع_١ = \left\{\frac{\sqrt{٣}+ت}{٢}\right\}^{٤}$ ، $ع_٢ = جا\frac{\pi}{٣} + ت\ جتا\frac{\pi}{٣}$ ؛ $ت^٢ = -١$

ضع العدد ع على الصورة المثلثية : $ع = \frac{ع_١}{ع_٢}$

الحل:



$ع_١ = \frac{١}{١٦}\{(\sqrt{٣}+ت)\}^{٤}$

$= \frac{١}{١٦}[٢(جتا ٣٠ + ت\ جا ٣٠)]^{٤}$

$ع_١ = جتا ١٢٠ + ت\ جا ١٢٠$ ★

$ع_٢ = جا ٦٠ + ت\ جتا ٦٠ = جتا ٣٠ + ت\ جا ٣٠$ ★

$\frac{\pi}{٢}ت$

$ع = \frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{جتا ١٢٠ + ت\ جا ١٢٠}{جتا ٣٠ + ت\ جا ٣٠} = جتا ٩٠ + ت\ جا ٩٠ = ت$

مثال: اذا كانت $س = \frac{١}{١+\omega ت}$ ، $ص = \frac{\omega + ت}{١+\omega^٢ ت}$ فان

$س - ص = ...$ ($ت+١$ ، $١-ت$ ، ١ ، $ت$)

الحل:

$س - ص = \frac{١}{١+\omega ت} - \frac{\omega+ت}{١+\omega^٢ت}$

$= \frac{١+\omega^٢ت - (\omega+ت)(١+\omega ت)}{(١+\omega ت)(١+\omega^٢ ت)}$

$= \frac{١+\cancel{\omega^٢ت} - \omega - \cancel{\omega^٢ت} - ت - \cancel{\omega ت^٢}}{١+\omega^٢ت+\omega ت+\omega^٣ت^٢}$

$= \frac{١-ت}{\cancel{١}+ت(\omega^٢+\omega)\cancel{-١}} = \frac{١-ت}{-ت} \times \frac{ت}{ت}$

$= \frac{ت-ت^٢}{١} = ت + ١$

☆ المحددات ☆

مثلا: بدون فك المحددات اثبت ان $\begin{vmatrix} 1 & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب} & 1+\text{ب}^2 & \text{ب جـ} \\ \text{جـ} & \text{ب جـ} & 1+\text{جـ}^2 \end{vmatrix} = 1$

الحل:

$\text{ع}_1 \times -\text{ب}$ والجمع مع ع_2 ثم $\text{ع}_1 \times -\text{جـ}$ والجمع مع ع_3

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{ب} & 1 & 0 \\ \text{جـ} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 = \text{الأيسر}$$

مثال: بدون فك المحدد اثبت ان $\begin{vmatrix} 3\text{س} & 3\text{س} & 3\text{س} \\ 1 & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+1 & \text{ب}+1 \end{vmatrix} = \text{صفر}$

الحل:

$$\Delta = 3\text{س} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+1 & \text{ب}+1 \end{vmatrix}$$

بطرح $\text{ع}_2 - \text{ع}_1$ ، $\text{ع}_3 - \text{ع}_1$

$\text{ع}_2 = \text{ع}_3$

$$\therefore \Delta = 3\text{س} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \text{ب}-1 & \text{أ}-1 \\ \text{أ}+1 & 1-\text{ب} & 1-\text{أ} \end{vmatrix} = 3\text{س}(\text{ب}-1)(\text{أ}-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \text{أ}+1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

مثال: مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} \text{أ}+1 & 3 & 2 \\ 0 & \text{أ}-1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 21$ هي .....

الحل: $\Delta = (\text{أ}+1)(\text{أ}-1) \times 7$ $\quad \therefore (\text{أ}^2-1) \cancel{\times 7} = \cancel{21}\ 3$

$\text{أ}^2 - 1 = 3 \qquad \text{أ}^2 = 4$

$\text{أ} = \pm 2$

$\therefore \text{م.ح} = \{2 ، -2\}$

★ المصفوفات ★

بعض خواص المصفوفات:

١) المصفوفة المربعة   ٢) المصفوفة الصفرية ($\boxed{}$)

٣) مصفوفة الوحدة (I)   ٤) مدور المصفوفة

٥) المصفوفة المتماثلة $\text{أ} = \text{أ}^{\text{مد}}$

٦) المصفوفة شبه المتماثلة $\text{أ} = -\,\text{أ}^{\text{مد}}$

★ العمليات على المصفوفات

١) ضرب عدد في مصفوفة   ٢) جمع مصفوفتين وطرحهم

٣) ضرب مصفوفتين: اذا كانت $\text{س}_{\text{م}\times\text{ن}}$ ، $\text{ص}_{\text{ن}\times\text{ل}}$

فان $(\text{س} \times \text{ص})_{\text{م}\times\text{ل}}$

★ المعكوس الضربي للمصفوفة

مثلا اذا كانت $\text{س} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{pmatrix}$ فان س^{-1} يمكن ايجاده اذا كان

محدد المصفوفة (Δ) $\neq$ صفر وتكون $\text{س}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{pmatrix}$

مثلا: اذا كانت $\text{س} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ اوجد س^{-1}

الحل: $\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} = ٢\times٥ - ٣\times٤ = -٢$

$\text{س}^{-1} = \frac{1}{-٢}\begin{pmatrix} ٥ & -٣ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ؛ $\text{س} \times \text{س}^{-1} = I$

* المصفوفة المنفردة (الشاذة) التي محددها = صفر

المصفوفة الغير منفردة (غير شاذة) محددها ≠ صفر

* مصفوفة المرافقات: (مصفوفة العوامل المرافقة)

مثال: اوجد مصفوفة المرافقات للمصفوفة

① $\text{أ} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ② $\text{ب} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

الحل:

$(\bar{\text{أ}}_{11}) = 4$ ، $(\bar{\text{أ}}_{21}) = -1$

$(\bar{\text{أ}}_{12}) = -(-2)$ ، $(\bar{\text{أ}}_{22}) = 3$ $\Longleftarrow$ $\bar{\text{أ}} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

② شرح

* المصفوفة الملحقة: هي مدور مصفوفة المرافقات

أي أن $\text{أ}^{\text{مل}} = (\bar{\text{أ}})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

* المعكوس الضربي للمصفوفة: $\boxed{\text{أ}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\,\text{أ}^{\text{مل}}}$

أي أن: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14$

$\therefore \text{أ}^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ للتأكد يجب ان يكون $\text{أ}^{-1}\,\text{أ} = I$

$\therefore \text{أ}^{-1}\,\text{أ} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 12+2 & -8+8 \\ -3+3 & 2+12 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ #

مثال: اذا كانت المصفوفة $\begin{pmatrix} أ^{٢} & ٢ \\ ٨ & ب^{٢} \end{pmatrix}$ منفردة : أ ، ب $\in$ ح فان

أب = ---

الحل: $\because$ المصفوفة منفردة $\therefore \Delta =$ صفر

$\therefore$ أ^{٢} ب^{٢} − ١٦ = ٠ أ^{٢}ب^{٢} = ١٦ أب = $\pm$ ٤

=

مثال: اذا كانت مصفوفة المرافقات للمصفوفة أ هي $\begin{pmatrix} -٦ & -٤ & ٢ \\ ٣٢ & ٨ & -٨ \\ -٢٢ & -٤ & ٢ \end{pmatrix}$

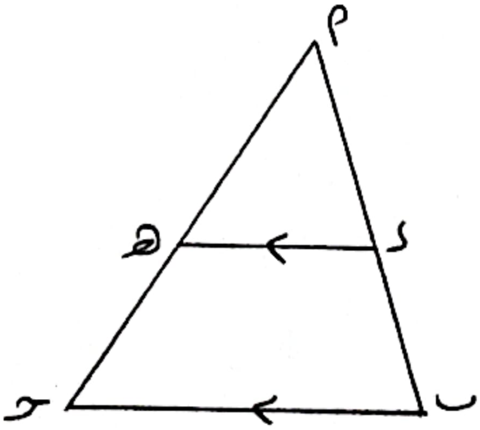
وكان |أ| = −١٦ فان أ$^{-١}$ = ---

الحل: $أ^{مل} = (\bar{أ})^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & -٨ & ٢ \\ -٤ & ٨ & -٤ \\ -٢٢ & ٣٢ & -٦ \end{pmatrix}$ بأخذ ٢ عامل مشترك

$\therefore أ^{-١} = \frac{-١}{١٦} \times ٢ \begin{pmatrix} ١ & -٤ & ١ \\ -٢ & ٤ & -٢ \\ -١١ & ١٦ & -٣ \end{pmatrix} = \frac{-١}{٨} \begin{pmatrix} ١ & -٤ & ١ \\ -٢ & ٤ & -٢ \\ ١١ & ١٦ & -٣ \end{pmatrix}$

=

مثال: في الشكل المرسوم



Δ أ ب حـ فيه $\overline{دهـ} // \overline{بحـ}$

فاذا كانت

س = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ دهـ & أهـ & أد \\ بحـ & أحـ & أب \end{pmatrix}$

فان المصفوفة س تكون

(منفردة ، غير منفردة ، متماثلة ، شبه متماثلة)

الحل: شرح

* **حل المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة**

اذا كان نظام المعادلات الخطية بالشكل

$أ_1 س + ب_1 ص = ج_1$ ، $أ_2 س + ب_2 ص = ج_2$ فان

مصفوفة المعاملات $أ = \begin{pmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{pmatrix}$ مصفوفة المجاهيل $\underset{\sim}{س} = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$

مصفوفة الحدود المطلقة $ب = \begin{pmatrix} ج_1 \\ ج_2 \end{pmatrix}$

المعادلة المصفوفية $أ \underset{\sim}{س} = ب$ للحل $أ^{-1} أ \underset{\sim}{س} = أ^{-1} ب$

ومنه $\underset{\sim}{س} = أ^{-1} ب$

مثال: اوجد مجموعة حل نظام المعادلات $٢س - ٣ص = ١$ ، $٤س + ٢ص = ٥$

الحل: شرح

* **رتبة المصفوفة:**

رتبة المصفوفة غير الصفرية هي اعلى درجة لمحدد اصغر للمصفوفة قيمته لا تساوي صفر

مثال: اذا كانت $أ = \begin{pmatrix} 1 & ك & -1 \\ 2 & -1 & ك \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix}$ اوجد قيمة ك اذا كان $ر(أ) = ٣$ ، $ر(أ) = ٢$

الحل: شرح

* الهندسة الفراغية *

* تحديد موضع نقطة في الفراغ ، تحديد مستويات الإحداثيات
* تحديد بعد نقطة عن محور

إذا كانت النقطة (أ ، ب ، ج) فإن

بعدها عن محور س = $\sqrt{\text{ب}^2+\text{ج}^2}$

~ ~ ~ ص = $\sqrt{\text{أ}^2+\text{ج}^2}$

~ ~ ~ ع = $\sqrt{\text{أ}^2+\text{ب}^2}$

* البعد بين نقطتين
* إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة

* معادلة الكرة في الفراغ:

إذا كان مركز الكرة = (ل ، ك ، ن) ، نصف قطرها نق فإن الصورة القياسية لمعادلة الكرة هي

$$(\text{س}-\text{ل})^2+(\text{ص}-\text{ك})^2+(\text{ع}-\text{ن})^2=\text{نق}^2$$

والصورة العامة هي

$$\text{س}^2+\text{ص}^2+\text{ع}^2-2\text{ل}\text{س}-2\text{ك}\text{ص}-2\text{ن}\text{ع}+\text{ل}^2+\text{ك}^2+\text{ن}^2-\text{نق}^2=\text{صفر}$$

$$\text{س}^2+\text{ص}^2+\text{ع}^2-2\text{ل}\text{س}-2\text{ك}\text{ص}-2\text{ن}\text{ع}+\text{د}=\text{صفر}$$

مثال: أوجد معادلة الكرة التي مركزها (١ ، -٢ ، ٣) ونصف قطرها ٥

الحل:

شرح

مثال

اوجد معادلة الكرة التي يقع مركزها على محور ص وتمس المستوى س ع ومركزها يبعد عنه ٤ وحدات طولية

الحل: اذا كان نق = ٤ فان المركز (٠، ٤، ٠) أو (٠، -٤، ٠)

المعادلات هي: س^2 + (ص - ٤)^2 + ع^2 = ١٦

س^2 + (ص + ٤)^2 + ع^2 = ١٦

=

مثال: اذا كان أ ب جـ مثلث فيه النقطة د منتصف ب جـ: أ(٣، ١، ٥)، ب(٢، ٣، ٧)، جـ(٠، ٣، ١) فان طول $\overline{\text{أد}}$ = ---- وحدة

(٩ ، ٢ ، ٧ ، ٣)

الحل: د = $\frac{\text{ب} + \text{جـ}}{2}$ د = (١، ٣، ٤)

أد = د - أ = (-٢، ٢، -١)

طول $\overline{\text{أد}}$ = $\sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$

=

مثال: معادلة الكرة التي تمر برؤوس Δ أ ب جـ: أ(٦، ٠، ٠)، ب(٠، ٦، ٠)، جـ(٠، ٠، ٦) ومركزها هو نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب جـ هي...

الحل: شرح

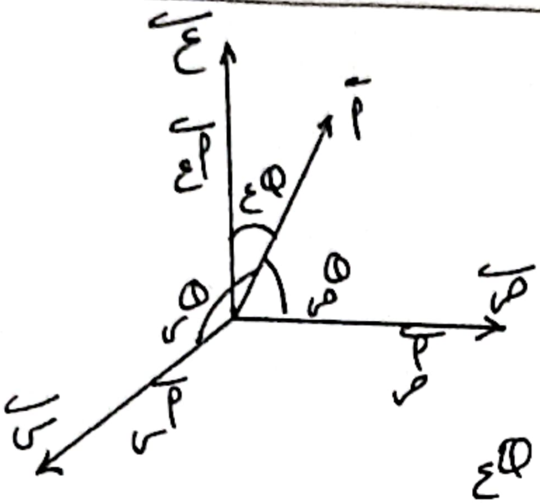
=

★ المتجهات في الفراغ ★

متجه الوحدة في اتجاه متجه معلوم: اذا كان $\vec{\text{أ}}$ = (أ$_{\text{س}}$، أ$_{\text{ص}}$، أ$_{\text{ع}}$) فان

متجه الوحدة في اتجاه $\vec{\text{أ}}$ = $\frac{\vec{\text{أ}}}{\|\vec{\text{أ}}\|}$

=



* **زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه :**

اذا كان $\overline{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$

فإن

$\text{أ}_{\text{س}} = \|\overline{\text{أ}}\| \text{ جتا هـ}_{\text{س}}$ ،

$\text{أ}_{\text{ص}} = \|\overline{\text{أ}}\| \text{ جتا هـ}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}} = \|\overline{\text{أ}}\| \text{ جتا هـ}_{\text{ع}}$

$\overline{\text{أ}} = \|\overline{\text{أ}}\| (\text{جتا هـ}_{\text{س}} ، \text{جتا هـ}_{\text{ص}} ، \text{جتا هـ}_{\text{ع}})$

$\dfrac{\overline{\text{أ}}}{\|\overline{\text{أ}}\|} = (\text{جتا هـ}_{\text{س}} ، \text{جتا هـ}_{\text{ص}} ، \text{جتا هـ}_{\text{ع}})$ ∵ $\dfrac{\overline{\text{أ}}}{\|\overline{\text{أ}}\|}$ متجه وحدة

∴ $\text{جتا}^2 \text{هـ}_{\text{س}} + \text{جتا}^2 \text{هـ}_{\text{ص}} + \text{جتا}^2 \text{هـ}_{\text{ع}} = ١$

مثال: اذا كانت (٣٥° ، ٦٠° ، هـ) هي زوايا الاتجاه للمتجه $\overline{\text{أ}}$ وكان $\|\overline{\text{أ}}\| = ٦$ اوجد هـ ، $\overline{\text{أ}}$

الحل: شرح

مثال: اذا كانت م (٣ ، ٢ ، ٥) نقطة في الفراغ سقطت على المستوى س ص هو نقطة ب وسقطت على المستوى س ع هو نقطة هـ فان ب هـ = ...

الحل: شرح

* **معادلة المستقيم:**

ر = ر١ + له هـ   الصورة المتجهة

حيث ر = (س، ص، ع) ، ر١ = (س١، ص١، ع١) ، هـ = (أ، ب، حـ)

فإن

س = س١ + لأ
ص = ص١ + ل ب
ع = ع١ + ل حـ
} المعادلات البارامترية

(س − س١) / أ = (ص − ص١) / ب = (ع − ع١) / حـ   الصورة الإحداثية

مثال:
أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢، ٣، −١) والمتجه (−١ ، ٢ ، ٣) يتبعه اتجاه له

الحل: شرح

مثال: إذا كان المستقيمان: (س + ١) / ٢ = (ص − ٢) / ٣ = (ع − ٣) / ٤ ، س / ٣ = (ص + ١) / ٤ = (ع − ١) / ك متعامدان فإن ك = ---

الحل: شرح

مثال: أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين ل١: ر = (٢، −١، ٢) + ل(−٢، ١، ٢)
ل٢: س = ١ ، (ص − ٤) / ٢ = (ع + ٥) / −٢

الحل: شرح

* اوجد بعد النقطة م(-١، ٢، ٥) عن المستقيم $\vec{ر}$ = (٢، ٤، ٥) + ل(٢، -٣، ٦) [هام]

الحل: نفرض ه نقطة على المستقيم

∴ ه = (٢+٢ل ، ٤-٣ل ، ٥+٦ل)

$\vec{مه}$ = ه - م = (٤+٢ل ، ٢-٣ل ، ٦ل)

$\vec{ق}$ هو متجه اتجاه المستقيم : $\vec{ق}$ = (٢ ، -٣ ، ٦)

∵ $\vec{مه}$ ⊥ المستقيم ∴ $\vec{مه}$. $\vec{ق}$ = صفر

∴ (٤+٢ل ، ٢-٣ل ، ٦ل) . (٢ ، -٣ ، ٦) = صفر

٨ + ٤ل - ٦ + ٩ل + ٣٦ل = صفر

٤٩ل = -٢   ل = $\frac{-٢}{٤٩}$

∴ $\vec{مه}$ = (٣ - $\frac{٤}{٤٩}$ ، ٤ + $\frac{٦}{٤٩}$ ، ٥ - $\frac{١٢}{٤٩}$)

= ($\frac{١٤٣}{٤٩}$ ، $\frac{٢٠٢}{٤٩}$ ، $\frac{٢٣٣}{٤٩}$)   ثم اكمل

* معادلة المستوى *

$\vec{ن}$. $\vec{ر}$ = $\vec{ن}$. $\vec{م}$ الصورة المتجهة

$\vec{ن}$ متجه عمودي على المستوى ، $\vec{ر}$ متجه موضع اي نقطة على المستوى

$\vec{م}$ نقطة معلومة على المستوى

∵ $\vec{ن}$ = (ا ، ب ، ح) ، $\vec{ر}$ = (س ، ص ، ع)

$\vec{م}$ = (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$)

∴ ا(س - س$_١$) + ب(ص - ص$_١$) + ح(ع - ع$_١$) = صفر   صورة قياسية

اس + بص + حع = $\underbrace{\text{اس}_١ + \text{بص}_١ + \text{حع}_١}$ ← = -د

∴ اس + بص + حع + د = صفر ← صورة عامة

مثال: اوجد معادلة المستوى المار بالنقط م(١، ٣، ٥)، ب(-١، ٢، ٤)، ه(٤، ٤، ٠). اوجد الصور المختلفة

الحل: شرح

=

مثال: اوجد نقطة تقاطع المستقيم ٢س = ٣ص - ١ = ع - ٤ مع المستوى
٣س + ص - ٢ع = ٥

الحل: شرح

=

مثال

اثبت ان المستقيم ر = (٢، ٣، -٨) + ل(-٣، ٢، ١، ٢)
يوازي المستوى ٢س + ص - ٣ع = ٥

الحل: شرح

=

★ الأوضاع النسبية لمستويين في الفراغ

مثال:

اوجد ل التي تجعل المستويين ٣س - ٤ص + ٢ع + ٩ = ٠،
٣س + ٤ص - لع + ٧ = ٠ متعامدين

الحل: شرح

=

مثال: اذا كان قياس الزاوية بين المستويين ٣س - ٦ص + مع - ٤ = ٠،
س + ع - ٧ = ٠ هو ٤٥° اوجد م

الحل:
شرح