المراجعة النهائية في التفاضل والتكامل

استقاقة الدوال المثلثية واستقاقة الأسية والجذرية

تذكران

1) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ 2) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ 3) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

4) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ 5) $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$ 6) $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

* الاتصال وقابلية الاستقاقة

تطبيقات: هل المعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ لها جذر حقيقي

المستقيمات المتوازية والمتعامدة

* أهم قواعد التكامل:

قواعد تستنتج من التكامل $\int \sin x = -\cos x + c$

$\int \cos x = \sin x + c$

* استقاقة الدوال المثلثية

مثال: $y = \sin x$

$y' = \cos x$

مثال: أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته $ص = قا س + ظا س$ عند $(\frac{\pi}{٤}, ١)$

مثال: إذا كانت $ص = قتا س$ أثبت أن $س \frac{دص}{دس} + س ص ظتا س = ٠$

مثال: إذا كانت $ص = (١ + ظا س)^{٢}$ فأثبت أن $\frac{دص}{دس} = \ldots$

مثال: أوجد $\frac{دص}{دس}$ للمنحنى $س^{٤} + ٤ س ص - ٣ ص^{٢} - ٢ س = ٣$ عند $(٠, ٢)$

مثال: إذا كانت $س = ٣ جتا \theta$ ، $ص = ٤ جا ٢\theta$ أوجد $\frac{دص}{دس}$ عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$

=

* استخدامات المشتقات العليا في التطبيقات

مثال: أوجد معادلة المماس والعمودي عليه للمنحنى $س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س + ٢ ص = ٠$ عند النقطة $(-١, ٣)$ الواقعة عليه

* مثال: أثبت بالتفاضل أن المستقيم $ص = ٢ س + ١$ يكون مماساً لمنحنى $ص = س^{٢} + ٣ س + ١$ عند النقطة $(٠, ١)$

مثال: أوجد معادلة المماس والعمودي عليه للمنحنى $ص = س + قا(\frac{\pi}{٤})$ عند النقطة الواقعة عليه ثم أوجد إحداثيات النقطة التي يكون عندها المماس $\parallel$ المستقيم $ص = ١$

=

مثال: إذا كانت $س = ٢ قا \theta$ ، $ص = ٢ ظا \theta$ فأثبت أن $\frac{دص}{دس} = \ldots$ عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$: أثبت $\neq$ ٠

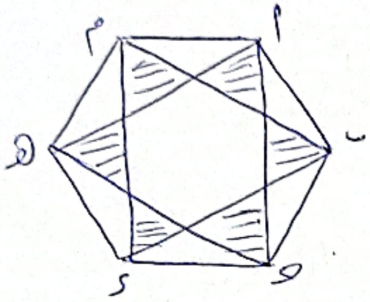
* المعدلات المرتبطة

تفاضل معدلات حجوم بعض الأشكال

مثال: تتحرك نقطة م على المنحنى $ص = س^2 + ١$ فإن النسبة بين معدل تغير الإحداثي السيني بالنسبة للزمن إلى معدل تغير الإحداثي الصادي بالنسبة للزمن = ...

مثال: في الشكل المرسوم سداسي منتظم طول ضلعه يزداد بمعدل ٢ سم/ث فإن معدل تغير مساحة الجزء المظلل بالنسبة للزمن = ... سم²/ث

(١٢ ، ٨ ، ١٢√٣ ، ٨√٣)



مثال: بالون كروي حجمه ٣٢١٠٠ سم³ علوه بغاز وتتيح له التسرب بغاز فإن حجم البالون ينقص بمعدل ٣٢٨ سم³/دقيقة محتفظا بشكله فإن

١) معدل تغير طول نصف قطره عندما يكون طوله = ٤ سم يساوي .... سم/دقيقة

٢) معدل تغير طول نصف قطره بعد ٨ دقائق من بدء التسرب = ... سم/دقيقة

مثال: إذا كان ارتفاع مثلث متساوي الأضلاع يتزايد بمعدل ٢ سم/ث فإن معدل تغير طول ضلع المثلث = ... سم/ث (٤ ، ٢ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٤}$)

مثال: وعاء فارغ حجمه ٤٥ سم³ يصب فيه الماء بمعدل ٥ سم³/ث فإن ارتفاع الماء يتزايد بمعدل .... سم/ث بعد مرور .... ث (٩ ، ١٣٥ ، ٤٥ ، ١٥)

مثال: يزداد طول ضلع مكعب بمعدل ٥ سم/ث فإن حجمه يزداد بمعدل .... سم³/ث عندما يكون طول ضلعه ١٠ سم

★ تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

النتيجة: ① $\lim_{س\to\infty}(1+\frac{1}{س})^{س}=هـ$ ② $\lim_{س\to0}(1+س)^{\frac{1}{س}}=هـ$

★ ثم اثبات عكسها

★ $\lim_{س\to0}\frac{\log_{هـ}(1+س)}{س}=1$ ★ $\lim_{س\to0}\frac{\log_{م}(1+س)}{س}=\log_{م}هـ$

★ $\lim_{س\to0}\frac{هـ^{س}-1}{س}=1$ ★ $\lim_{س\to0}\frac{م^{س}-1}{س}=\log_{هـ}م$

أثبت أن: ① $\lim_{س\to0}\frac{ج^{س}-1}{س}$ ② $\lim_{س\to0}\frac{هـ^{ك س}-1}{هـ^{ل س}-1}$

③ اذا كان: $\lim_{س\to0}\frac{\log_{هـ}(1+ك س)}{س}=ج$ فأن ك = ... (٥، ٧، ٩، ١٤)

★ مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية

$د(س)=هـ^{س}$ ← $د'(س)=هـ^{س}$ ، $د(س)=هـ^{ق(س)}$ ← $د'(س)=هـ^{ق(س)}\times ق'(س)$

$د(س)=م^{س}$ ← $د'(س)=م^{س}\times\log_{هـ}م$ ، ...

$د(س)=\log_{هـ}س$ ، ...

★ لإستقاء اللوغاريتمي

مثال: $ص=س^{جتاس}$ اوجد $\frac{د ص}{د س}$

ج/ ص: اذا كان $هـ^{ص}-هـ س=0$ فأن $\frac{د ص}{د س}=$ ...

$(\frac{هـ}{ص}\ ،\ \frac{1}{س}\ ،\ \frac{1}{ص}\ ،\ \frac{هـ}{س})$

تعريف: إذا كانت د(س) = لو_هـ س − (لو_هـ س)² : س ∈]٠، ∞[
فإن د'(١) = ... (ضع ٢ ، ١−٢ ، ٥−١)

★ إذا كان ص = هـ^س فإن ص_س = ص × ص_س = ... (−١، ١، ١، ص_س)

مثال: إذا كان المتغيران ص = P هـ^س ، ص = ب هـ^س تتناسبان على التقاطع
فإن ... (P = −١ ، P = ٢ب − ١ ، P = ٥ − ١ ، P = ب = ١)

مثال: معادلة العمودي للمنحنى هـ^ص = −س عند نقطة الأصل واحد ينتمي
السيني = ١ ص = ...

★ تكامل الدوال الأسية والمغاريتمية

∫ هـ^س . د س = هـ^س + ث ، ∫ هـ^د(س) . د س = هـ^د(س) + ث

أمثلة:
١) ∫ ٤ هـ^س د س = ...
٢) ∫ ٤ طا س هـ^قتا س . د س = ...
٣) ∫ قا س ظا س / (٢ + قا س) . د س = ... + ث
٤) ∫ (س + ١) / (س + ٢) . د س = ... + ث

مثال: إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د(س) عند أي نقطة عليه (س، ص)
يساوي هـ^س طا س وكانت د(٠) = هـ فإن د(π/٢) = ...
(٢هـ − ١ ، هـ − ١ ، ١ − هـ ، ١ − ٢هـ)

* حلول الدالة

النقط الحرجة:

يكون الدالة د متصلة على الفترة]م، ب[نقطة حرجة هـ : هـ ∈]م، ب[

اذا كان ١) د'(هـ) = صفر أو د'(هـ) غير موجود.

التزايد والتناقص

القيم العظمى والصغرى المحلية

مثال: اوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د(س) = س٤ − ٨س٢

مثال: اوجد نقط القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د(س) = |س − ١|

مثال: اذا كانت د(س) = ٢م س٢ − س − ٥ لها قيمة عظمى محلية عند س = ١

فان $\frac{ب}{م}$ = ... (٩، −٩)، (٠، ٥)، (−٥، ٠)

مثال: الدالة د(س) = س٣ + ٣س٢ لها قيمة عظمى محلية عند النقطة ...

(١٠، ١٠) ، (−٢، ٤) ، (٢، ٤) ، (−٣، −٤)

القيم القصوى:

اوجد القيم القصوى للدالة

د(س) = ٢ س٤ − س٢ + ١ في الفترة [−١، ١]

* التحدب لأعلى لأسفل ونقط الانقلاب

مثال: اذا كان د(س) = $\frac{١}{٣}$ س٣ − ٢س٢ + ٤س − ٥ عين فترات التحدب لأعلى ولأسفل

ونقط الانقلاب لمنحنى الدالة (ا، و، ب)

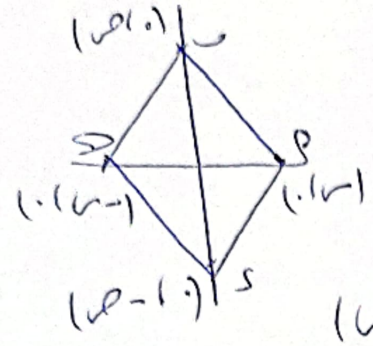
مثال: اذا كان منحنى الدالة د : د(س) = م س٣ − ٢س٢ + ٤ له نقطة انقلاب

عند س = $\frac{١}{٣}$ فان $\frac{د(١)}{د(١)}$ = ... (−٢، −١، ١، ٢)

تطبيقات هندسية أخرى:

مثال ١: مستطيل محيطه ٢٨ سم فأكبر مساحة =

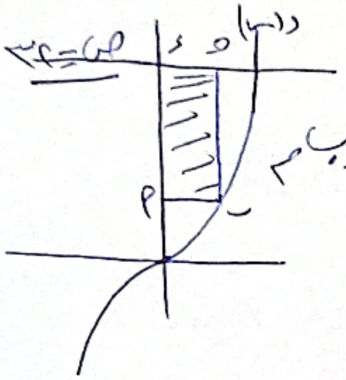
مثال ٢: في الشكل المرسوم: إذا كان أ ب = ٥ سم
فأكبر مساحة لشكل أ ب ج د أكبر ما يمكن
عندما ---



(س = ص ، س = ٢ ص) ، ص = ٥ ، س = ٤ ص

مثال ٣: د(س) = س^٢ . ق

أكبر مساحة لمستطيل أ ب ج د حيث د ---



وضع بسم

==========

التكامل وطرق التكامل

تنويه عن التكامل المباشر

١) التكامل بالتعويض: ١) ∫ ٢ س (س^٢ + ٣)^٥ د س

٢) ∫ (س^٣ + ٣) √(س - ٢) د س

٣) التكامل بالتجزئ: ١) ∫ س جتا س د س ٢) ∫ س ل س د س

٣) ∫ س هـ^س د س ٤) ∫ س^٢ هـ^س د س

مثال ٤: إذا كان ميل المماس عند أي نقطة (س، ص) يحقق
العلاقة ص ص = س ، أوجد معادلة المنحنى إذا كان يمر بالنقطة (٢، ١)

تكامل الدوال المثلثية

تذكر أن

مثال: أوجد ∫ قا^٣ س ظا س . د س

ج) ∫ 1/(1 − جتا س) د س

ج) ∫ ظا س جا^٢ س د س

د) ∫ جا س / (1 − جتا س) د س

* التكامل المحدد:

مثال: إذا كان ∫_٠^١ د(س) د س = ٨ ، ∫_٠^١ ر(س) د س = ٣

فأوجد قيمة ∫_٠^١ [د(س) + ٢ ر(س) − ٥] د س = ؟

مثال: ∫_{−٢}^{٢} (س^٣ + ظا س) / (س^٢ + ١) د س = ؟

المساحات والحجوم:

١) أوجد مساحة المنطقة المحدودة بمنحنى الدالة د(س) = س^٢ + ٤
ومحور السينات والمستقيمين س = −١ ، س = ٢

٢) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين ص = ٦ − س^٢ ، ص = ½ س^٢
والمستقيمين س = −١ ، س = ١

٣) أوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمستقيمات
ص = س + ١ ، ص = ٠ ، س = ١ ، س = ٤
دورة كاملة حول محور السينات

٤) أوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى
ص = ٤ − س^٢ ومحور السينات دورة كاملة حول محور السينات