(١)

* الارتباط *

* هو علاقة بين متغيرين (ظاهرتين) أو أكثر

معامل الارتباط الخطي لبيرسون

$$ر = \frac{ن\,مجـ\,س\,ص - مجـ\,س\,مجـ\,ص}{\sqrt{[ن\,مجـ\,س^2 - (مجـ\,س)^2][ن\,مجـ\,ص^2 - (مجـ\,ص)^2]}}$$

* بعض خصائص معامل الارتباط ر

١) ر > ٠ ارتباط طردي ، ر < ٠ ارتباط عكسي ، ر = ٠ لا يوجد ارتباط

٢) ر = ١ طردي تام ، ر = −١ عكسي تام ∴ ر ∈ [−١، ١]

مثال ١:

لدراسة العلاقة بين كمية مسحوق ما (ص) والسعر بالجنيه (س) لدينا البيانات الآتية

مجـ س = ٥٠ ، مجـ ص = ٦٠ ، مجـ س ص = ٢٦١ ، مجـ $س^2$ = ٣١٠ ، مجـ $ص^2$ = ٤٩٨

ن = ١٠ أوجد معامل الارتباط الخطي لبيرسون وبين نوعه

الحل: ∴ ر = ٠٫٣٥ طردي

—

مثال ٢: من بيانات الجدول الآتي احسب معامل الارتباط الخطي لبيرسون وبين نوعه

٣	٥	٦	٤	١	٢	س
٦	٩	١٢	٩	٥	٨	ص

الحل: مجـ س = ٢١ ، مجـ ص = ٤٩

مجـ $س^2$ = ٩١ ، مجـ $ص^2$ = ٤٣١

مجـ س ص = ١٩٢ ن = ٦

ر = ... = ٠٫٧٢ طردي

"معامل ارتباط الرتب لسبيرمان"

$$ر = ١ - \frac{٦\,مجـ\,ف^2}{ن\,(ن^2 - ١)}$$

مثال: من بيانات الجدول الآتي

احسب معامل ارتباط الرتب

٦	٥	٤	٣	٢	١	
٩	٧	٦	٤	٢	١	س
١	٢	٣	٤	٤	٦	ص
١	٢	٣	٤٫٥	٤٫٥	٦	

	$ف^2$	ف
	٦٨٫٥	

$$ر = ١ - \frac{٦٨٫٥ \times ٦}{٦ \times ٣٥}$$

= −٠٫٩٥

مثال: الجدول الآتي يوضح توزيع مجموعة مكونة من ٦ كتب طبقاً لسعرها (س) وحجم المبيعات (ص).

س	منخفض	منخفض جداً	متوسط	مرتفع جداً	مرتفع	مرتفع جداً
ص	مرتفع	مرتفع	مرتفع جداً	منخفض جداً	متوسط	منخفض

$ر = ١ - \frac{٦٠,٥ \times ٦}{٣٥ \times ٦}$

$= -٠,٧٣$ عكسي

=

* الانحدار:

* هو أسلوب إحصائي يتم بواسطته تقدير أحد المتغيرين بدلالة الآخر

عند دراسة العلاقة بين متغيرين س ، ص وكانت لدينا مجموعة من الأزواج المرتبة للقيم المتناظرة لهذين المتغيرين . وتمثلنا هذه الأزواج المرتبة بنقاط في المستوى الإحداثي فإننا نحصل على شكل يسمى "شكل الانتشار" وهو يحدد نوع الارتباط

=

* خط الانحدار: هو خط مستقيم تقع النقط حوله وقريبة منه وإن كانت لا تقع جميعها عليه وتستخدم طريقة المربعات الصغرى لتوفيق أفضل خط يجمع هذه النقط حوله

* معادلة خط الانحدار:

معادلة خط انحدار ص على س هي $\hat{ص} = م\,س + ب$

م يسمى معامل انحدار ص على س ، إشارة م تحدد نوع الارتباط

$$م = \frac{ن\,مجـ\,س\,ص - مجـ\,س\,مجـ\,ص}{ن\,مجـ\,س^{2} - (مجـ\,س)^{2}} \quad ، \quad ب = \frac{مجـ\,ص - م\,مجـ\,س}{ن}$$

مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية − القيمة المحسوبة |

=

مثال: من بيانات الجدول الآتي
اذا كانت معادلة خط الانحدار
هي ص = ٤,٢ + ٠,٣ س
فان مقدار الخطأ عندما س = ١٠ يساوي ----
(-٢,٨ ، -٠,٨ ، ٠,٨ ، ٢,٨)

س	٦	٥	٧	٨	١٠	٦	٧
ص	٤	٧	٥	٦	٨	٧	٨

=

مثال: في دراسة العلاقة بين الكمية المطلوبة (س) من سلعة ما بالطن ، السعر (ص) بالألف جنيه
كانت لدينا البيانات

مجـ س = ٧٩ ، مجـ ص = ١٧٩ ، مجـ س ص = ٢٨٩٩ ، مجـ س² = ١٣٣١ ، ن = ٧

١) اوجد معادلة خط الانحدار ٢) قدر سعر ٢٠ طن من هذه السلعة بالجنيه

ص = ٣ + ٢ س   ص = ---- ٤٣

الحل: ب = $\frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^٢ - (\text{مجـ س})^٢} = \frac{٧ \times ٢٨٩٩ - ٧٩ \times ١٧٩}{٧ \times ١٣٣١ - (٧٩)^٢} = ٢$

أ = $\frac{\text{مجـ ص} - \text{ب مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{١٧٩ - ٢ \times ٧٩}{٧} = ٣$

∴ ص = ٢ س + ٣
∵ س = ٢٠ ∴ ص = ٤٣ القيمة ... ٤٣

=

مثال: اذا وقعت النقطتان (١٢،٥) ، (١٤،٤) على خط الانحدار فان جميع النقط التالية تقع على نفس الخط ماعدا النقطة ----
(١٠،٨) ، (١٢،٦) ، (١٠،١٥) ، (١٢،٥)

=

مثال: اذا وقعت النقطتان (١١,٥ ، ١٠) ، (٥,٦ ، ٥) على خط الانحدار فان الارتباط بين س ، ص يكون
(طردي ، عكسياً ، تاماً ، منعدماً)

=

* المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية *

* المتغير العشوائي المتقطع (او المنفصل): هو متغير مداه مجموعة منتهية قابلة للعد من الاعداد الحقيقية

* اذا كان س متغير عشوائي متقطع مداه المجموعة {س١، س٢، ...، سن} فإن الدالة د : د(سر) = ل(س = سر) لكل ر = ١، ٢، ٣، ...، ن
تحدد ما يسمى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س
وهذه الدالة تحقق الشروط
١) د(سر) ≥ ٠ لكل ر = ١، ٢، ٣، ...، ن
٢) د(س١) + د(س٢) + ... + د(سن) = ١ مجموع الاحتمالات = ١

مثال: في تجربة القاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية اوجد مدى المتغير العشوائي س الذي يعبر عن "عدد الصور - عدد الكتابات" ثم اوجد توزيعه الاحتمالي

د(٣) = ل(س = ٣) = $\frac{1}{8}$ ...
التوزيع الاحتمالي

سر	٣	١	١-	٣-
د(سر)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

* المتوسط - التباين - الانحراف المعياري للمتغير العشوائي المتقطع *

* المتوسط او التوقع (μ) : $\mu = \sum_{ر=1}^{ن}$ سر × د(سر)

* التباين σ^2 ⟸ $\sigma^2 = \sum$ سر² × د(سر) $- \mu^2$

* الانحراف المعياري σ = $\sqrt{\text{التباين}}$

* معامل الاختلاف = $\frac{\sigma}{\mu} \times 100$

ملاحظات:

سر	د(سر)	سر د(سر)	سر² د(سر)
⋮	⋮	⋮	
		م = ∑	∑ سر² × د(سر)

مثال: في تجربة القاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين. اذا كان المتغير العشوائي سر يعبر عن الفرق المطلق بين العددين الظاهرين

صف المتغير العشوائي سر واوجد مداه وتوزيعه الاحتمالي ثم احسب المتوسط والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف

الحل: سر = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥} المدى

بعد الجدول: م = $\frac{٣٥}{١٨}$ ، ع² = $\frac{٢٥}{٦}$ − $(\frac{٣٥}{١٨})^2$ ≃ ٢٫٠٥

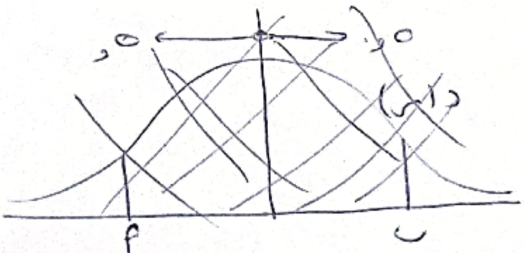
ع ≃ ١٫٤٣ ، معامل الاختلاف = $\frac{ع}{م}$ × ١٠٠ ≃ ٧٣٪

مثال ٢: اذا كان المتغير العشوائي سر معرف على فضاء عينة لتجربة عشوائية يأخذ القيم ٠، ١، ٣، ٥ وكانت الاحتمالات المناظرة لهذه القيم هي $\frac{١-م}{١٢}$ ، $\frac{١-٢م}{١٢}$ ، $\frac{١+٢م}{١٢}$ ، $\frac{١-م}{٤}$ اوجد قيمة م ثم اوجد التوزيع الاحتمالي واحسب المتوسط والتباين

م = $\frac{١١}{٤}$ ، ع² = $\frac{٤٣}{١٦}$

∑ سر² د(سر) = $\frac{٤١}{٤}$

مثال: الصفحة القادمة ←

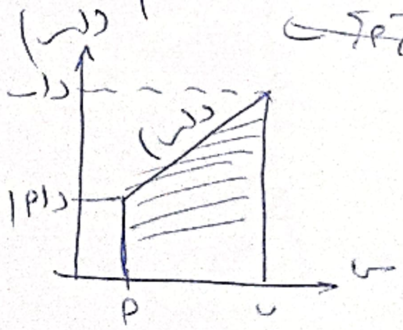


* المتغير العشوائي المتصل ودالة الكثافة:

~~د(سر) ≥ ٠~~

~~المساحة تحت المنحنى محصورة بين سر = ١~~

~~ل(م ≤ سر ≤ ب) = المساحة تحت المنحنى والمحصورة بين م ، ب~~



* اذا كانت د(سر) دالة كثافة احتمال فإن

ل(م ≤ سر ≤ ب) = ١

مثال ١: اذا كان س متغير عشوائي متصل ودالة كثافة الاحتمال له هي

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٥٠}(١٧ - ٢س) & ١ \le س \le ٦ \\ صفر & فيما\ عدا\ ذلك \end{cases}$$

* اثبت ان ل(١ < س < ٦) = ١ ثم احسب

١) ل(س < ٤) ٢) ل(س ≥ ٣) ٣) ل(٢ ≤ س < ٥)

٤) ل(-١ ≤ س ≤ ٣)

مثال ٢: اذا كان س متغير عشوائي متصل دالة كثافة الاحتمال له هي

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٢٤}(ك س + ١) & ٢ \le س \le ٥ \\ صفر & فيما\ عدا\ ذلك \end{cases}$$

اوجد قيمة ك ثم احسب ل(٣ < س < ٤) ، ل(س ≤ ٤)

مثال ٣: اذا كان س متغير عشوائي متقطع متوسطه μ = ٣ وتوزيعه الاحتمالي كما يلي

س	٠	٢	ك	٤
د(س)	م	٢م	$\frac{١}{٢}$	٥م

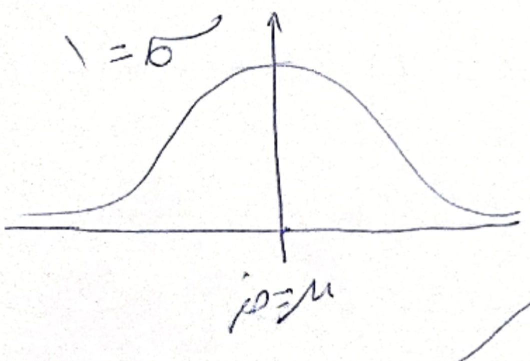
اوجد قيمة م ، ك

ثم اوجد الانحراف المعياري

*** التوزيع الطبيعي *** هو متغير عشوائي متصل

دالة كثافة الاحتمال له تعتمد على قيمتيها الوسط μ ؟

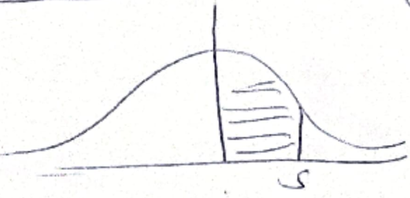
الانحراف المعياري σ



خواص المنحنى

---

* التوزيع الطبيعي المعياري



ل(٠ ≤ ص ≤ ى)

باستخدام الجدول

مثال١: اذا كان ص متغير طبيعي معياري بحيث ل(-م ≤ ص ≤ م) = ٠,٧٩٦ فإن م = ---

(٠,٢٩٨ ، ١,٢ ، ١,٢٧ ، ١٠,٢٧)

مثال٢: ص متغير طبيعي متصل معياري وكان ل(ص ≥ ك) = ٠,١٦٦ فإن ك = ---

(١,٢٧ ، ٠,٩٧ ، ٢,١٣ ، ١,٢)

مثال٣: ص متغير طبيعي معياري وكان ل(ص ≤ ك) = ٠,٩٢٦٥ فإن ك = --- ١,٤٥

مثال٤: ص متغير طبيعي معياري وكان ل(ك < ص < ١,٤٢) = ٠,١١٧١ فإن ك = --- ٠,٨٦

* التوزيع الطبيعي الغير معياري

س متغير طبيعي غير معياري

لتوزيع طبيعي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ

$$\boxed{ص = \frac{س - \mu}{\sigma}}$$

مثال: س متغير طبيعي غير معياري متوسطه μ = ١٧ وانحرافه المعياري σ = ٢ اوجد

١) ل(١٧ ≤ س ≤ ٢١,٤) ← ل(٠ < ص < ٢,٢) = ٠,٤٨٦١

٢) ل(س < ١٨,٢) ← ل(ص < ٠,٦)

= ٠,٥ + ل(٠ < ص < ٠,٦) = ٠,٥ + ٠,٢٢٥٩

مثال: س متغير طبيعي غير معياري متوسطه μ = ١٠٠ وانحرافه المعياري σ = ٤

اوجد قيمة ك اذا كان ١) ل(س ≥ ك) = ٠,٠٣١٤

٢) ل(س ≥ ك) = ٠,٥٦٣٦ ← ٠,٠٦٣٦ ← ٠,١٦ ك = ٩٩,٣٦

١) ل(٠ < ص < $\frac{ك - ١٠٠}{٤}$) = ٠,٤٦٨٦ بالكشف ١,٨٦ ك = ١٠٧,٤٤

٢)

مثال: اذا كان س متغير عشوائي طبيعي غير معياري متوسطه μ وانحرافه المعياري σ
فان ل(μ < س < $\mu + 2\sigma$) = ----
(٠,٩٧٧٢ ، ٠,٢٢٨٦ ، ٠,٤٧٧٢ ، ٠,٥٨٤٤٢)

* الاحتمال الشرطي والاحداث المستقلة

مسلمات وقوانين الاحتمال

١) ٠ ≤ ل(أ) ≤ ١ ، ٢) ---

* ل(أ − ب) = ل(أ ∩ بَ) = ل(بَ − أَ)
* ل(أ − ب) + ل(ب − أ) = ل(أ ∪ ب) − ل(أ ∩ ب)

* الاحتمال الشرطي: ل(أ | ب) = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل(ب)}}$ ، ل(ب | أ) = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل(أ)}}$

خواصه:

١) ٠ ≤ ل(أ | ب) ≤ ١   ٢) ل(أَ | ب) = ١ − ل(أ | ب)

٣) اذا كانت أ١ ∩ أ٢ = ∅ فان
ل((أ١ ∪ أ٢) | ب) = ل(أ١ | ب) + ل(أ٢ | ب)

∵ ل(أ | ب) = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل(ب)}}$ ⟸ ل(أ ∩ ب) = ل(أ | ب) . ل(ب)
= ل(ب | أ) . ل(أ)

أي أن الاحتمال وقوع (أ و ب) = احتمال وقوع أ × احتمال وقوع ب بشرط وقوع أ

★ **الاحداث المستقلة :**

اذا كان وقوع أحد الحدثين لا يؤثر في احتمال وقوع الآخر

أي أن ل(أ|ب) = ل(أ) ، ل(ب|أ) = ل(ب)

ومنه ل(أ∩ب) = ل(أ) × ل(ب)

★ يقال للحدثين أ ، ب أنهما مستقلان اذا وفقط اذا كان

ل(أ∩ب) = ل(أ) × ل(ب)

مثال : اذا كان ل(أ) = $\frac{٢}{٥}$ ، ل(ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(أ∪ب) = $\frac{٣}{٥}$

أوجد كل من

١) ل(أ|ب) ؟ $\frac{٢}{٥}$ ٢) ل(ب|أ) ؟ $\frac{١}{٢}$ ٣) ل(أ∩بَ) ؟ $\frac{١}{٥}$

٤) ل(أ|بَ) ؟ $\frac{٢}{٥}$

مثال : اذا كان أ ، ب حدثين في فضاء عينة لتجربة عشوائية حيث

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ، أ = {٢ ، ٣ ، ٥} ،

ب = {١ ، ٤ ، ٥} هل أ ، ب مستقلين ؟ وضح ذلك

الشرط : ل(أ∩ب) = ل(أ) × ل(ب)

مثال : اذا كان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٤ ، ل(أ∩ب) = ٠,٢

فإن ل(أ|بَ)

مثال : اذا كان ل(أ − ب) = ٠,٤ ، ل(أ∩ب) = ٠,١

فإن ل(بَ|أ) = ---

(٠,٣ ، ٠,٥ ، ٠,٤ ، <u>٠,٨</u>)